Chapitre 10 : théorèmes d'analyse

HEI 1 - 2011/2012

Les fonctions considérées sont à variable réelle et à valeurs réelles.

I. Image continue d'un intervalle

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Propriété (de Cauchy)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b des éléments de I tels que $f(a)f(b) < 0$. Alors, il existe c compris entre a et b tel que $f(c) = 0$.

Démonstration. Supposons, par exemple, $a < b$ et $f(a) < 0 < f(b)$.
On peut construire par récurrence deux suites (a_n) et (b_n) telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n,\ b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n} \text{ et } f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$$

— Prendre $a_0 = a$ et $b_0 = b$
— Supposons que a_n et b_n existent et considérons $c_n = \frac{a_n+b_n}{2}$.
  — Si $f(c_n) \leq 0$, alors prendre $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$.
  — Si $f(c_n) \geq 0$, alors prendre $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$.

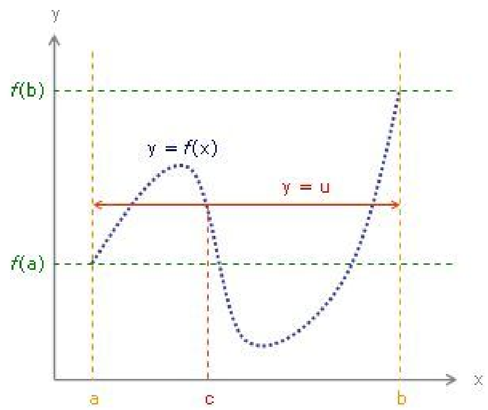
Ces deux suites sont alors adjacentes donc elles convergent vers une même limite c qui fournit le résultat par passage à la limite dans $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$. □

Remarque. Par contraposition, une fonction continue sur un intervalle, qui ne s'annule pas, est de signe constant.

Théorème (des valeurs intermédiaires)**.**

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a, b des éléments de I.
Alors, pour tout réel u compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c compris entre a et b tel que $u = f(c)$.

Démonstration. On peut supposer u strictement compris entre $f(a)$ et $f(b)$ (sinon, le résultat est trivial). Il suffit alors d'appliquer la propriété de Cauchy à $g : x \mapsto f(x) - u$. □



Remarque. L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle, mais pas forcément du même type ($\cos(]-\infty,+\infty[) = [-1,1]$).

2. Théorème de Weierstrass

Théorème (de Weierstrass)**.**

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Démonstration. Belle application du théorème de Bozano-Weirstrass pour les MPSI. □

Remarque. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment, autrement dit, si f est continue sur $[a,b]$, alors $f([a,b]) = [m,M]$ avec $m = \min\{f(x), x \in [a,b]\}$ et $M = \max\{f(x), x \in [a,b]\}$.

Exemple. Soit f une fonction continue et strictement positive sur un segment I.

1. Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que $f \geq m$.
2. Montrer que cette propriété est en défaut si I est un intervalle quelconque.

II. Accroissements finis

1. Théorème de Rolle

Propriété (CN d'extremum local)**.**

Soit f une fonction définie sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Si f admet un extremum en un point $c \in]a,b[$, alors $f'(c) = 0$.

Démonstration. Supposons, par exemple, que f présente un maximum en c. Alors,

$$\forall x < c, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \text{ et } \forall x > c, \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$$

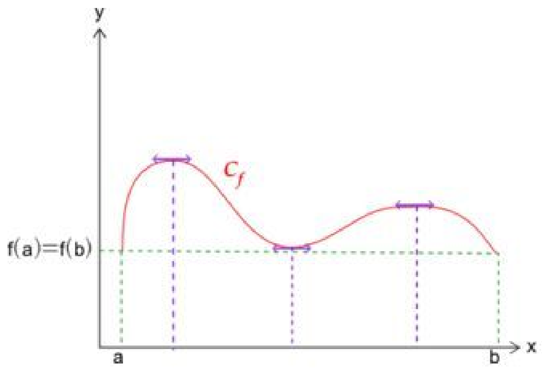
On en déduit $f'_g(c) \geq 0$ et $f'_d(c) \leq 0$ d'où $f'(c) = 0$. □

Remarque. Cette condition n'est pas suffisante.

Théorème (de Rolle)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a)=f(b)$.
Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f'(c)=0$.

Démonstration. Si f est constante sur $[a,b]$, $f'=0$ sur $]a,b[$.
Sinon, f admet au moins un extremum en un point $c\in]a,b[$ d'où le résultat d'après la propriété précédente. □



Remarque.
— Il existe au moins une valeur de c, mais il peut en exister plusieurs.
— Si f est dérivable sur un intervalle I, entre deux zéros de f situés dans I, il y a au moins un zéro de f'. Par suite, si f possède n zéros distincts dans I, f' possède au moins n-1 zéros distincts dans I.

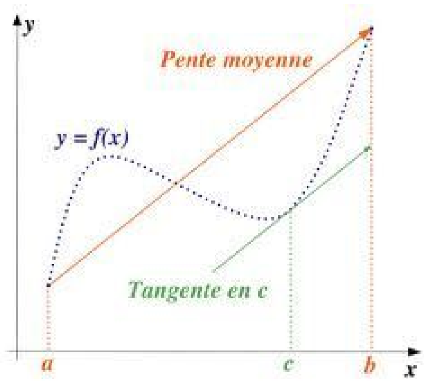
2. Théorème des accroissements finis

Théorème (des accroissements finis)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors, il existe $c\in]a,b[$ tel que $f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$.

Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème de Rolle à $g:x\mapsto f(x)-f(a)-(x-a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. □

Interprétation graphique



Remarque. En posant $h = b - a$, le TAF nous assure l'existence de $\theta \in]0,1[$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h).$$

Corollaire (Monotonie et signe de la dérivée)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Alors,
- f est constante sur $[a,b] \Leftrightarrow f' = 0$ sur $]a,b[$
- f est croissante sur $[a,b] \Leftrightarrow f' \geq 0$ sur $]a,b[$
- f est décroissante sur $[a,b] \Leftrightarrow f' \leq 0$ sur $]a,b[$

Démonstration. Montrons la deuxième proposition (les autres se traitent de la même manière).

- Supposons f croissante sur $[a,b]$.
  Alors, pour tout $x_0 \in]a,b[$, on a $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$ d'où $f'(x_0) \geq 0$ par passage à la limite.

- Supposons $f' \geq 0$ sur $]a,b[$.
  Il suffit d'appliquer le TAF pour montrer que $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$ pour tout $x < y \in [a,b]$

□

Remarque. Si $f' > 0$, alors f est strictement croissante, mais f' peut s'annuler alors que f est strictement croissante.

3. Inégalité des accroissements finis

Théorème (inégalité des accroissements finis)**.**

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$ telles que $|f'| \leq g'$ sur $]a,b[$.
Alors, $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$.

Démonstration.
- Avec $f' \leq g'$, $(f-g)' \leq 0$ donc $f - g$ est décroissante et donc $f(b) - g(b) \leq f(a) - g(a)$ d'où $f(b) - f(a) \leq g(b) - g(a)$.
- Avec $f' \geq -g'$, $(f+g)' \geq 0$ donc $f + g$ est croissante et donc $f(b) + g(b) \geq f(a) + g(a)$ d'où $f(b) - f(a) \geq -(g(b) - g(a))$.
- D'où le résultat.

□

Remarque.
- Un cas particulier de l'IAF (ou une application directe du TAF) est le résultat suivant :
  Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $|f'| \leq k$ sur $]a,b[$.
  Alors, $|f(b) - f(a)| \leq k(b-a)$
- Si l'on ne connaît pas l'ordre entre a et b, la conclusion devient : $|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$

Exemple. Etudier la convergence de la suite récurrente (u_n) associée à $f = \cos$ de premier terme 1.
On pourra remarquer que f admet un unique point fixe l sur $[\frac{1}{2}, 1]$ qui est stable par f (donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$). Mais $|f'| \leq \sin(1) \leq 0,9$ sur $[\frac{1}{2}, 1]$ donc l'IAF fournit $|u_{n+1} - l| \leq 0,9|u_n - l|$ et donc $|u_n - l| \leq 0,9^n |u_0 - l|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'où le résultat.

Corollaire (Dérivabilité des prolongements continus)**.**

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b]$.
Si f' admet une limite l en a, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$

Démonstration. Nécessite la définition de limite à l'aide des quantificateurs. $\square$

Remarque. Cette condition suffisante de dérivabilité en a n'est pas nécessaire

Exemple. Montrer que $\left|1 - \frac{x^2}{2} - \cos x\right| \leq \frac{x^4}{24}$ pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
On pourra utiliser de manière répétée l'IAF sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ *pour obtenir successivement :*
$|\sin x| \leq x$ *puis* $|1 - \cos x| \leq \frac{x^2}{2}$ *puis* $|x - \sin x| \leq \frac{x^3}{6}$ *et enfin le résultat.*

Exemple. Montrer que $\left|\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}\right| \leq \frac{x^3}{3}$ pour tout $x \in [0, +\infty[$.
On pourra considérer la fonction définie par $f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}$.

Exemple. Montrer que la fonction $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0 et que ce prolongement, encore noté f, est dérivable en 0 (et même de classe $\mathbb{C}^1$)